

# Компенсация термонаведенного двулучепреломления в активных элементах из поликристаллической керамики

М.А.Каган, Е.А.Хазанов

*Существенным отличием поликристаллической керамики от монокристалла является то, что ориентация кристаллографических осей (а следовательно, и осей термонаведенного двулучепреломления) в каждой грануле керамики случайна. Для расчета деполяризации в керамике, а также эффективности ее компенсации применен кватернионный формализм. Полученные аналитические выражения хорошо согласуются с численными расчетами. Показано, что чем больше отношение длины образца к размеру гранулы, тем ближе свойства керамики к свойствам монокристалла с ориентацией [111] (в частности, нескомпенсированная деполяризация обратно пропорциональна этому отношению).*

**Ключевые слова:** Nd: YAG-керамика, термонаведенная деполяризация, двулучепреломление.

## 1. Введение

В последнее время все большее внимание привлекает использование в качестве активной среды поликристаллической керамики из Nd: YAG (см. [1 - 6] и ссылки в них) и других кубических кристаллов [7]. Такой интерес обусловлен существенными преимуществами керамики по сравнению с монокристаллом. Современная технология позволяет изготавливать керамические активные элементы (АЭ) с хорошим оптическим качеством, большой апертурой и высокой концентрацией ионов неодима. Многие свойства керамики близки к свойствам монокристалла, однако термонаведенная деполяризация излучения имеет ряд отличий [6].

Поликристаллическая керамика состоит из множества монокристаллических гранул размером 10-100 мкм, разделенных тонкими (~ 1 нм) границами. Существенным отличием ее от монокристалла является то, что ориентация кристаллографических осей в каждой грануле произвольна. Поскольку монокристалл изотропен, керамика тоже изотропна. Кроме того, в отсутствие тепловых эффектов керамика практически свободна от деполяризации [2]. Как в монокристалле, так и в керамике фотоупругий эффект, обусловленный градиентом температуры, вызывает двулучепреломление. Однако в отличие от монокристалла, керамика представляет собой систему фазовых пластинок со случайной ориентацией осей и случайным набегом фазы между собственными поляризациями. Аналитические выражения для собственных поляризаций и набегов фазы между ними были найдены в работе [6].

Цель настоящей работы - получение аналитических выражений для деполяризации излучения, вызванной термонаведенным двулучепреломлением, а также исследование

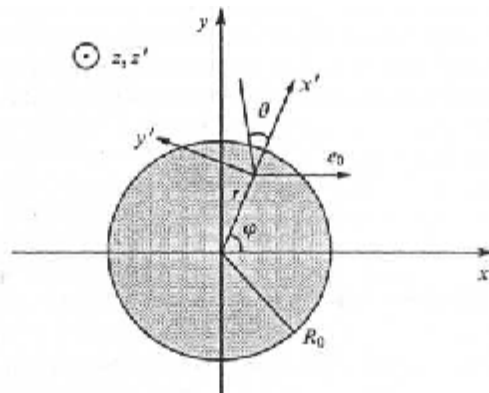


Рис.1. Взаимное расположение систем координат  $xzy$  и  $x'y'z'$ .

эффективности компенсации деполяризации методами, используемыми для монокристаллов. Вместо обычного матричного формализма Джонса мы применяли кватернионный формализм [8,9], согласно которому каждой грануле соответствует нормированный кватернион (гиперкомплексное число).

## 2. Собственные поляризации и разность фаз между ними в керамике

Рассмотрим цилиндрический керамический АЭ с радиусом  $R_0$  и длиной  $L$ . Расчет деполяризации будем проводить в геометрооптическом приближении, т. е. падающий на образец волновой пучок будем рассматривать как совокупность лучей, параллельных оси образца  $z$ . На рис.1 изображен один из таких лучей, проходящий на расстоянии  $r$  от оси образца и имеющий азимутальный угол  $\phi$ .

Пусть плотность мощности тепловыделения в АЭ и теплоотвод не зависят от  $z$  и  $\phi$ . В каждом сечении  $z = \text{const}$  радиально симметричный градиент температуры задает два выделенных направления - радиальное и азимутальное. Собственные поляризации могут и не совпадать с этими направлениями, т. к. поляризационные свойства каждой гранулы зависят от термоупругих на-

пряжений (зависящих, в свою очередь, от пьезооптических коэффициентов), которые определяются распределением температуры и ориентацией системы координат кристаллографических осей  $abc$  относительно лабораторной системы  $xuz$  [6,10]. В простейшем случае оси  $abc$  совпадают с осями  $xuz$ , что соответствует ориентации [001].

Произвольное расположение осей  $abc$  может быть задано при помощи трех последовательных поворотов системы координат  $xuz$  относительно кристаллической решетки на углы Эйлера  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\Phi$  [11]. Сначала система координат поворачивается на угол  $\alpha$  ( $\alpha \in [-\pi, \pi]$ ) вокруг оси  $g$ , совпадающей с осью  $c$ , потом на угол  $\beta$  ( $\beta \in [-\pi/2, \pi/2]$ ) вокруг оси  $y$ , а затем опять вокруг оси  $z$  на угол  $\Phi$  ( $\Phi \in [-\pi, \pi]$ ). Таким образом, ориентация осей кристалла  $abc$  в каждой грануле определяется тремя углами:  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\Phi$ , которые являются случайными величинами, равномерно распределенными в соответствующих интервалах. Поскольку в среде нет гиротропии и дихроизма, то с поляризационной точки зрения одна гранула представляет собой линейную фазовую пластинку, которая характеризуется двумя случайными величинами: углом наклона ( $\kappa$  оси  $x'$ ) собственных поляризаций  $\theta$  и разностью фаз между ними  $\delta$ . А керамический образец, следовательно, эквивалентен последовательности таких фазовых пластинок.

Используя выражения, приведенные в [6], можно для каждой гранулы получить следующие соотношения, связывающие параметры  $\theta$  и  $\delta$  с эйлеровыми углами  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\Phi$ :

$$\tan 2\theta = \frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}, \quad \delta = -\frac{p}{N} \frac{l_g}{l_g} \frac{\tilde{a}}{\cos 2\theta}, \quad (1)$$

где

$$\tilde{a} = 2\xi h + \frac{\xi - 1}{4} (g\sigma_1 + h\tau_1); \quad \tilde{b} = \frac{\xi - 1}{4} (g\sigma_2 + h\tau_2); \quad (2)$$

$$\sigma_1 = \sin^2 \beta \{ [8 \cos^2 \beta - \sin^2 2\alpha (3 + \cos 2\beta)] \cos 2\Phi' + 2 \cos \beta \sin 4\alpha \sin 2\Phi' \};$$

$$\sigma_2 = \sin^2 \beta \{ [8 \cos^2 \beta - \sin^2 2\alpha (3 + \cos 2\beta)] \sin 2\Phi' - 2 \cos \beta \sin 4\alpha \cos 2\Phi' \};$$

$$\tau_1 = -4 \cos^2 \beta - \sin^4 \beta (4 - \sin^2 \alpha) - \cos 4\Phi' \times [\sin^4 \beta (4 - \sin^2 2\alpha) + 4 \cos^2 \beta \cos 4\alpha]$$

$$- \sin 4\Phi' \sin 4\alpha \cos \beta (3 + \cos 2\beta);$$

$$\tau_2 = \sin 4\alpha \cos \beta (3 + \cos 2\beta) \cos 4\Phi' - [\sin^4 \beta (4 - \sin^2 2\alpha) + 4 \cos^2 \beta \cos 4\alpha] \sin 4\Phi';$$

$$p = \frac{P_h}{\lambda} \frac{a_T}{\kappa} \frac{\pi^3}{8} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} (p_{11} - p_{12}); \quad \xi = \frac{2p_{44}}{p_{11} - p_{12}}; \quad \Phi' = \Phi - \varphi;$$

$N$  - число гранул;  $P_h$  - мощность тепловыделения, приходящаяся на весь АЭ;  $\lambda$  - длина волны;  $\kappa$  - коэффициент теплопроводности;  $a_T$  - коэффициент теплового расширения;  $p_{ij}$  - коэффициенты фотоупругости;  $l_g$  - длина гранулы (нормально распределенная случайная величина со средним значением  $\langle l_g \rangle$  и среднеквадратичным отклонением  $\sigma_{len}$ ). Выражения (1) и (2) при фиксированных углах Эйлера дают значения  $\theta$  и  $\delta$  для монокристалла соответствующей ориентации. Например, для ориентации [001] ( $\alpha = \beta = \Phi = 0$ ) и [111] ( $\alpha = \pi/4$ ,  $\tan \beta = \sqrt{2}$ ,  $\Phi$  — любое), получаем известные [12] выражения:  $\tan (2\theta + 2j) = x \tan 2j$  и  $\theta = 0$  соответственно. Заметим, что поскольку  $\Phi$  - случайная величина, равномерно распределенная в интервале  $[-\pi, \pi]$ , то при любых усреднениях штрих у  $\Phi$  в выражениях для  $\sigma_{1,2}$  и  $\tau_{1,2}$  можно опустить.

Ограничимся случаем однородного по объему тепловыделения, для которого

$$h = u/2, \quad g = u - 1/2, \quad (3)$$

где  $u = (r/R_0)^2$ . В общем случае выражения для  $g$  и  $h$  получены в работе [6]. Заметим, что величина  $x$  является постоянной, характеризующей данный кристалл. Например, для Nd:YAG имеем  $x = 3.2$ .

Из (1) и (2) следует, что усредненный по  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\Phi$  угол  $\theta$  равен нулю. В дальнейшем мы будем считать, что случайные величины  $l_g$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\Phi$  являются независимыми для разных гранул, т. е. функция распределения  $F$  есть произведение функций распределения для отдельных гранул  $f_i(l_g, \alpha, \beta, \Phi)$ :

$$F(f_1, f_2, \dots, f_N) = \prod_{i=1}^N f_i(l_g, \alpha, \beta, \Phi). \quad (4)$$

### 3. Деполяризация излучения

Пусть поперечная электромагнитная волна падает на оптическую систему без поглощения, которой соответствует матрица Джонса  $U$ , связывающая поляризацию на выходе системы  $e$  со входной поляризацией  $e_0$ :

$$e = U e_0 \quad (|e| = |e_0| = 1). \quad (5)$$

Локальной деполяризацией  $\Gamma$  будем называть долю мощности выходного излучения, приходящуюся на поляризацию  $e_\perp$ , ортогональную  $e_0$ :

$$\Gamma = |e_\perp^* e|^2 = e_0^* U^* e_\perp e U e_0. \quad (6)$$

Здесь и далее звездочка означает эрмитово сопряжение. Поскольку матрица  $U$  зависит от  $r$  и  $j$ , то  $\Gamma$  также зависит от  $r, j$ . Найдем  $\Gamma(r, j)$  в предположении, что падающий пучок был линейно поляризован вдоль оси  $x$ , т. е. в штрихованной системе координат (см. рис.1)

$$e_0 = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ -\sin \varphi \end{pmatrix}, \quad e_0^* = (\cos \varphi, -\sin \varphi), \quad (7)$$

$$e_\perp = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad e_\perp^* = (\sin \varphi, \cos \varphi).$$

Выражение (6) можно переписать в виде

$$\Gamma = e_0^* \tilde{G} e_0, \quad (8)$$

причем матрица  $\hat{G}$  связана с матрицей Джонса  $\hat{U}$  следующим образом:

$$\hat{G} = \hat{U}^* \hat{M} \hat{U}, \quad (9)$$

где

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi & \sin \varphi \cos \varphi \\ \sin \varphi \cos \varphi & \cos^2 \varphi \end{pmatrix}.$$

Если матрица  $\hat{U}$  описывает оптическую систему, содержащую керамический элемент, то она зависит от случайных величин  $l_i$ ,  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $\varphi_i$ , где  $i$ -номер гранулы. Обозначим усредненную по всем гранулам с учетом функции распределения (4) матрицу  $\hat{G}$  как  $\langle \hat{G} \rangle$ . Тогда из (8) для средней деполаризации получим

$$\langle \Gamma \rangle = \epsilon_0^* \langle \hat{G} \rangle \epsilon_0. \quad (10)$$

Наибольший интерес представляет интегральная по сечению деполаризация

$$\gamma = \frac{1}{\pi R_0^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R_0} \langle \Gamma \rangle(r, \varphi) r dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \langle \Gamma \rangle(u, \varphi) du. \quad (11)$$

Здесь и далее мы полагаем, что интенсивность в пучке имеет вид

$$I = \begin{cases} I_0 & \text{при } r \leq R_0, \\ 0 & \text{при } r > R_0. \end{cases}$$

#### 4. Компенсация деполаризации в различных схемах

Рассчитаем среднюю деполаризацию в керамическом АЭ, а также в некоторых схемах, используемых для ее компенсации (рис.2). Деполаризация в керамических элементах без компенсации (рис.2,а) и во всех схемах с компенсацией (рис.2,б-г) определяется выражениями (10) и

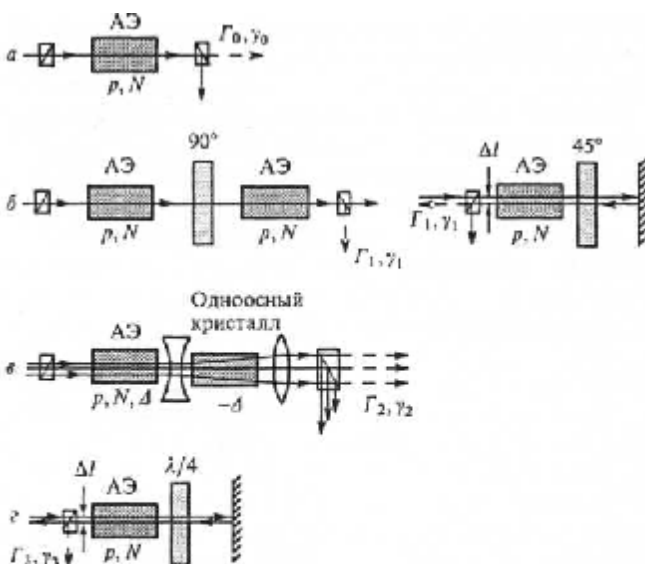


Рис.2. Измерения деполаризации в схеме с АЭ без компенсации (а), в схеме I с двумя АЭ и 90-градусным вращателем (слева) [13] или с одним АЭ и фарадеевским зеркалом (справа) (б), в схеме II с АЭ и одноосным кристаллом [15] (в) и в схеме III с АЭ и пластинкой  $\lambda/4$  [16] (г).

(11). Различие заключается только в матрицах  $\hat{U}$  и  $\hat{G}$ , описывающих оптическую систему.

Матрица Джонса  $\hat{T}$  керамического элемента является произведением матриц Джонса  $N$  фазовых пластинок, соответствующих  $N$  гранулам:

$$\hat{T} = \hat{Q}_N \hat{Q}_{N-1} \dots \hat{Q}_2 \hat{Q}_1, \quad (12)$$

где  $\hat{Q}_k = \hat{Q}(\delta_k, \theta_k)$  – матрица  $k$ -й гранулы;

$$\hat{Q}(\delta, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\delta}{2} + i \sin \frac{\delta}{2} \cos 2\theta & i \sin \frac{\delta}{2} \sin 2\theta \\ i \sin \frac{\delta}{2} \sin 2\theta & \cos \frac{\delta}{2} - i \sin \frac{\delta}{2} \cos 2\theta \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Для схемы без компенсации (рис.2,а) из (9) и (12) находим матрицу  $\hat{G}_0$ :

$$\hat{G}_0 = \hat{T}^* \hat{M} \hat{T} = \hat{Q}_1^* \hat{Q}_2^* \dots \hat{Q}_{N-1}^* \hat{Q}_N^* \hat{M} \hat{Q}_N \hat{Q}_{N-1} \dots \hat{Q}_2 \hat{Q}_1. \quad (14)$$

Для расчета матрицы  $\hat{G}$ , соответствующей схеме I (рис.2,б, слева) [13], обозначим  $\hat{T}_1$  и  $\hat{T}_2$  матрицы Джонса первого и второго АЭ. Если в схеме I тепловые эффекты отсутствуют, то излучение на выходе будет поляризовано вдоль оси  $y$ , в то время как исходная поляризация была направлена по оси  $x$ . Поэтому для удобства расчета поместим после второго образца еще один вращатель на  $-90^\circ$  (на рис.2,б не показан) и будем рассчитывать деполаризацию как долю мощности в  $y$ -компоненте поля, т. е. в компоненте с поляризацией, ортогональной входной. Тогда  $\hat{U} = \hat{J} \cdot \hat{T}_2 \hat{T}_1 = \hat{T}_2 \cdot \hat{T}_1$ , где  $\hat{J}$  – матрица поворота на  $90^\circ$ , а матрица  $\hat{T}_1$  определяется выражением (12). Таким образом, выражение для  $\hat{G}_1$  имеет вид

$$\hat{G}_1 = \hat{T}_1^* \hat{T}_2^* \hat{M} \hat{T}_2 \hat{T}_1. \quad (15)$$

В схеме I с фарадеевским зеркалом [14] (рис.2,б, справа) возможны следующие два варианта. Если на обратном пути все лучи проходят через те же гранулы, что и при прямом проходе, то деполаризация  $\gamma = 0$ . В противном случае, если поперечное смещение луча между прямым и обратным проходом  $\Delta l$  больше или порядка размера гранулы  $\langle l_g \rangle$ , т.е. на обратном проходе лучи идут по другим гранулам, данная схема полностью эквивалентна схеме с 90-градусным вращателем (рис.2 б слева).

Ключевым элементом в схеме II (рис.2,в) является одноосный кристалл, вырезанный вдоль оптической оси и помещенный внутри телескопа [15]. Этот кристалл описывается матрицей Джонса  $\hat{Q}(-\Delta, 0)$ , поскольку его собственные линейные поляризации ориентированы по азимуту и по радиусу. Следовательно,

$$\hat{G}_2 = \hat{T}^* \hat{Q}(\Delta, 0) \hat{M} \hat{Q}(-\Delta, 0) \hat{T}, \quad (16)$$

где  $\Delta$  – эффективный набег фазы в керамике (см. выражение (21)).

Ось пластинки  $\lambda/4$  в схеме III (рис.2,г) параллельна оси  $x$  [16]. В системе координат  $x'y'$  двойному проходу через пластинку  $\lambda/4$  соответствует матрица Джонса  $\hat{Q}(p, -j)$ . Отсюда следует, что

$$\hat{G}_3 = \hat{T}_1^* \hat{Q}(-\pi, -\varphi) \hat{T}_2^* \hat{M} \hat{T}_2 \hat{Q}(\pi, -\varphi) \hat{T}_1. \quad (17)$$

Здесь мы полагаем, что на обратном пути луч проходит через другие гранулы.

В Приложении описан механизм усреднения соотношений (14)-(17) по всем гранулам, если число последних фиксировано и равно  $N$ , и получены выражения для  $(\Gamma_{0-3})$ . После подстановки их в (11) имеем

$$\gamma_0 = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\sin pX}{pX} \right) + \frac{p^2}{8N} \int_0^1 \left[ \left( A + \frac{1}{2}B \right) \cos \Delta + B \right] du - \frac{p}{16N} \int_0^1 \frac{B}{a} \sin \Delta du, \quad (18)$$

$$\gamma_1 = \frac{p^2}{4N} \int_0^1 \left( A + \frac{3}{2}B \right) du - \frac{p}{16N} \int_0^1 \frac{B}{a} \sin 2\Delta du, \quad \gamma_2 = \frac{\gamma_1}{2}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \gamma_3 = & \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\sin pX}{pX} \right) - \frac{1}{16} \left( 1 - \frac{\sin 2pX}{2pX} \right) \\ & + \frac{p^2}{16N} \int_0^1 \{ B[4 \cos^2(\Delta/2) + 3 \cos \Delta] \\ & + 2A[2 + \cos \Delta - \cos^2(\Delta/2)] \} du \\ & - \frac{p^2}{32N} \int_0^1 \frac{B}{a} (\sin 2\Delta - \sin \Delta) du, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} a = \langle \bar{a} \rangle &= 2Xh; \quad X = \frac{75\xi + 53}{128}; \quad \Delta = pa; \\ A = \langle \bar{a}^2 \rangle - a^2 &= (1 + d^2) \frac{h^2}{2^{14}} \\ &\times (22665\xi^2 + 31470\xi + 11401) + B - 4(Xh)^2; \\ B = \langle \bar{b}^2 \rangle &= (1 + d^2) \frac{(\xi - 1)^2}{2^{15}} (1060g^2 + 9865h^2); \quad d = \frac{\sigma_{\text{len}}}{\langle l_h \rangle}. \end{aligned} \quad (21)$$

Заметим, что данная методика расчета может существенно упростить решение задачи о распространении света в двулучепреломляющих волокнах со случайными неоднородностями [17].

## 5. Обсуждение результатов

Легко показать, что, если отношение длины АЭ к средней длине гранулы стремится к бесконечности ( $N \rightarrow \infty$ ), выражения (18)-(20) для  $\gamma_{0-3}$  практически совпадают с аналогичными выражениями для монокристалла с ориентацией [111]. Единственное отличие состоит в том, что для монокристалла величина  $X = (1 + 2\xi)/3$ , а для керамики  $X = (75\xi + 53)/128$ . Другими словами, при  $N \gg \infty$  керамика эквивалентна монокристаллу с ориентацией [111] и эффективной константой  $\xi_{\text{eff}}$ , определяемой выражением

$$\xi_{\text{eff}} - 1 = (\xi - 1)(15/16)^2. \quad (22)$$

Для Nd: YAG-керамики, например,  $\xi = 3.2$ ,  $\xi_{\text{eff}} = 2.9$ . Это приводит к очень незначительному различию интегральных деполаризаций, что согласуется с экспериментальными данными [2].

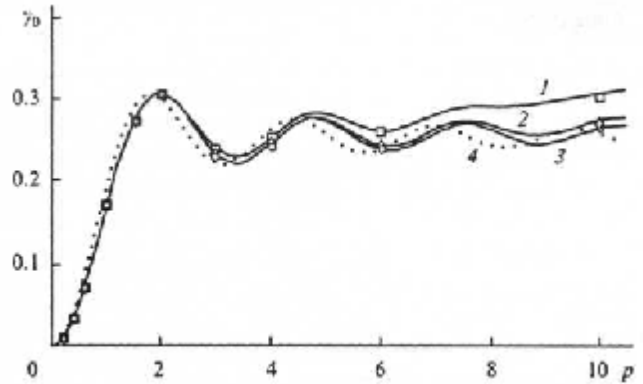


Рис.3. Зависимости  $\gamma_0(p)$  для керамики при  $N = 30$  ( $\square$ , 1), 100 ( $\circ$ , 2) и 300 ( $\circ$ , 3), а также для монокристалла (4).

На рис.3 и 4 приведены зависимости деполаризации  $\gamma$  от нормированной мощности излучения  $p$  для Nd: YAG-керамики в различных схемах (кривые) и результаты численных расчетов по методике [6] (точки). Видно, что при большом отношении  $N$  длины АЭ к средней длине гранулы наблюдается почти идеальное совпадение аналитических и численных расчетов.

Необходимо отметить, что длина АЭ может меняться от 2 - 3 мм при диодной накачке до 10 см при ламповой, а размер гранулы - от 10 до 100 мкм. Таким образом, отношение  $N$  может варьироваться в широких пределах - от 20 до 1000. Для Nd: YAG-керамики выражение для  $p$  может быть представлено в виде  $p = 0.025P_h$ . Мощность тепловыделения  $P_h$  может достигать сотен ватт, поэтому параметр  $p$  меняется от нуля вплоть до 20. Однако при столь большом тепловыделении может произойти разрушение образца.

Теоретически для монокристалла компенсация деполаризации в схемах на рис.2,б,в идеальна, однако на практике при больших мощностях тепловыделения удается добиться компенсации на уровне 1 %-3%. Если параметры  $p$  и  $N$  таковы, что деполаризация существенно меньше этой величины, то с практической точки зрения можно считать, что деполаризация в керамике не превышает деполаризацию в монокристалле с ориентацией [111].

При конечных  $N$  формулы (18) -(20) получаются в результате разложения выражений для деполаризации в ряд Тейлора по малому параметру  $\epsilon = p/N$  (см. Приложение), если не учитывать члены порядка  $\epsilon^2$ . Этим и объ-

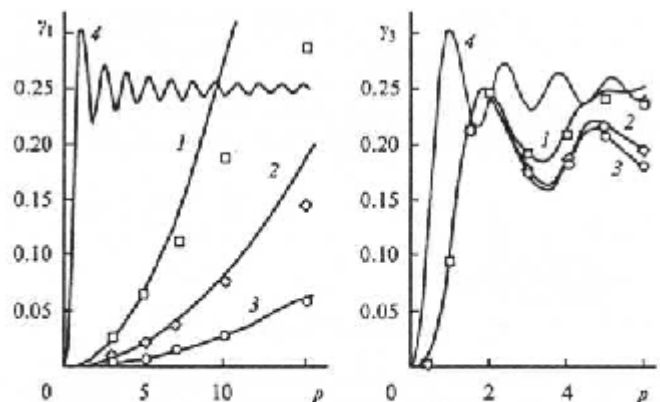


Рис.4. Зависимости  $\gamma_1(p)$  (а) и  $\gamma_3(p)$  (б) при  $N = 30$  ( $\square$ , 1), 100 ( $\circ$ , 2) и 300 ( $\circ$ , 3). Для сравнения приведена кривая 4, показывающая деполаризацию в отсутствие 90-градусного вращателя в схеме I и пластинки  $\lambda/4$  в схеме III.

ясняется расхождение аналитических и численных результатов на рис.3 и 4 при достаточно больших  $\epsilon$ . Дополнительная (по отношению к случаю  $N = \infty$ ) деполяризация пропорциональна квадрату нормированной мощности излучения  $p$  и обратно пропорциональна  $N$ . Это обусловлено наличием дисперсии локальной деполяризации  $D_L$ . Применяв подход, аналогичный изложенному в Приложении, можно показать, что

$$D_L = (\langle \Gamma^2 \rangle - \langle \Gamma \rangle^2) \sim p^2/N, \quad (23)$$

что также согласуется с численными результатами [6] и является важным следствием случайного характера двулучепреломления в керамике.

Действительно, рассмотрим оптическую систему из  $m$  последовательных керамических образцов, каждый из которых характеризуется числом гранул  $N_0$  и мощностью тепловыделения  $p_0$ . В этом случае систему можно рассматривать как один образец, содержащий  $N = mN_0$  гранул, на который приходится мощность  $p = mp_0$ . Тогда согласно (23) дисперсия локальной деполяризации данной системы элементов  $D_L$  будет в  $m$  раз больше, чем в каждом отдельном образце ( $D_{L0}$ ), т. е.  $D_L = mD_{L0}$ . Полученный результат совпадает с классической задачей о случайном блуждании, в которой средний квадрат смещения пропорционален числу шагов. Исходя из тех же соображений, объясняется тот факт, что  $\gamma_2 = \gamma_1/2$ , поскольку в схеме II присутствует один керамический АЭ, в то время как в схеме I их два.

Все известные для монокристалла ограничения методов компенсации (например, наличие толстой линзы с фокусным расстоянием, соизмеримым с длиной АЭ) в той же мере справедливы и для керамики. Лучи, разнесенные в поперечном направлении на размер гранулы, проходят через независимый набор гранул. Следовательно, значения деполяризации для них будут различными. Таким образом, в крупномасштабной полярной структуре выходного поляризованного (а также деполяризованного) излучения будет присутствовать модуляция интенсивности с характерным масштабом порядка  $(l_g)$ . Данная модуляция обусловлена дисперсией деполяризации  $D_L$ , и глубина модуляции увеличивается пропорционально квадрату нормированной мощности излучения  $p$  и обратно пропорционально отношению  $N$  длины АЭ к средней длине гранулы. Наличие разных гранул на пути соседних лучей кроме указанной амплитудной модуляции пучка может привести также и к фазовой.

Обсудим применимость используемого геометрического подхода. Размер гранулы много меньше характерного масштаба градиента температуры, определяющего изменение показателя преломления. Поскольку расстояние между гранулами (размер полостей) много меньше длины волны [2], можно полагать, что лучи при прохождении сквозь керамику имеют примерно те же траектории, что и при прохождении через монокристалл (искривленные из-за тепловой линзы). В [18] получена формула для среднеквадратичного бокового смещения луча  $p$  при распространении света в случайно-неоднородной среде. Применительно к керамике эта формула дает  $p \gg 0.27N^{1/2}$  хлр. Как правило,  $p$  меньше среднего размера гранулы  $(l_g)$ . В противном случае характерный масштаб модуляции, обсуждавшейся выше, будет равен  $p$ , а не  $(l_g)$ .

Необходимо также отметить, что численные результаты (точки на рис.3,4) получены при решении несколько другой, более «физичной» задачи, в которой предпола-

лось, что фиксировано не число гранул  $N$ , а длина АЭ [6]. Эти две постановки задачи полностью эквивалентны, если считать фиксированной длину гранулы  $l_g$ , что равносильно равенству нулю дисперсии длины гранулы:  $d = \sigma_{\text{len}}/(l_g) = 0$ . Зависимости на рис.3, 4 построены именно для этого случая. Правомочность сравнения результатов двух данных задач сохранится, если  $d < 1/N^{1/2}$ . Последнее условие означает, что на длине образца среднеквадратичное отклонение числа гранул не превышает единицы, т. е. число гранул в образце можно считать фиксированным. Заметим, что численные расчеты показали слабую зависимость деполяризации от дисперсии длины гранулы  $d$ .

Поликристаллическая керамика может быть использована не только в качестве активной среды и модуляторов добротности [19], но и для создания изоляторов Фарадея на основе магнитоактивных элементов из тербий-галлиевого граната (TGG). Принципиальной трудности для создания TGG-керамики нет [20]. Проведенный анализ может быть применен также к изоляторам Фарадея, работающим при большой средней мощности, с учетом специфики, накладываемой на деполяризацию магнитным полем [10].

## 6. Заключение

Подводя итоги, можно сделать следующие выводы:

1. Если отношение длины АЭ к средней длине гранулы стремится к бесконечности, то по поляризационным свойствам керамика очень похожа на монокристалл с ориентацией осей [111]. В этом случае дисперсия деполяризации стремится к нулю, а сама деполяризация во всех схемах (рис.2) описывается формулами для монокристалла с ориентацией [111] с учетом изменения параметра кристалла  $\xi$  согласно (22).

2. Эффективность компенсации двулучепреломления в керамике известными методами хуже, чем в монокристалле. Увеличение деполяризации в керамике по сравнению с монокристаллом пропорционально квадрату нормированной мощности излучения  $p$  и обратно пропорционально отношению  $N$  длины АЭ к средней длине гранулы.

3. Наряду с крупномасштабной структурой и в поляризованном, и в деполяризованном излучении присутствует также случайная мелкомасштабная модуляция с характерным поперечным размером, равным размеру гранулы  $(l_g)$ , и глубиной, пропорциональной  $p^2$  и обратно пропорциональной  $N$ .

## Приложение

Рассмотрим метод усреднения выражений (14)-(17). Данная процедура существенно упрощается, если вместо формализма матриц Джонса применить кватернионный формализм (см. [8,9] и ссылки в них), согласно которому каждой грануле соответствует нормированный кватернион (гиперкомплексное число). Прежде всего опишем переход от матричного описания к кватернионному. Каждому оптическому элементу отвечает некоторая унитарная матрица Джонса  $U$ , для которой

$$\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{П1})$$

где звездочка означает эрмитово сопряжение. Произвольная унитарная матрица  $U$  представляется в виде

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \mu_0 + i\mu_1 & \mu_2 + i\mu_3 \\ -\mu_2 + i\mu_3 & \mu_0 - i\mu_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{П2})$$

где  $|\mu_0|^2 + |\mu_1|^2 + |\mu_2|^2 + |\mu_3|^2 = 1$ . Выражение (П2) может быть переписано в терминах матриц Паули

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и будет иметь вид

$$\hat{U} = \mu_0 \sigma_0 + \mu_1 \sigma_1 + \mu_2 \sigma_2 + \mu_3 \sigma_3. \quad (\text{П3})$$

Матрицы  $\hat{\sigma}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\hat{\sigma}_i^2 = -\hat{\sigma}_0, \quad \hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j = -\hat{\sigma}_j \hat{\sigma}_i = \hat{\sigma}_k, \quad (\text{П4а})$$

где индексы  $i, j$  и  $k$  удовлетворяют условию циклической перестановки.

Алгебра комплексных матриц  $2 \times 2$  изоморфна алгебре кватернионов - гиперкомплексных чисел с тремя мнимыми единицами  $I, J$  и  $K$ , которые удовлетворяют соотношениям, аналогичным (П4а):

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1; \quad IJ = -JI = K, \quad JK = -KJ = I, \\ KI = -IK = J. \quad (\text{П4б})$$

Таким образом, осуществив замену

$$\hat{\sigma}_0 \rightarrow I, \quad \hat{\sigma}_1 \rightarrow I, \quad \hat{\sigma}_2 \rightarrow J, \quad \hat{\sigma}_3 \rightarrow K, \quad (\text{П5})$$

мы можем рассматривать матрицу  $\hat{U}$  как кватернион  $\hat{U} = \mu_0 + \mu_1 I + \mu_2 J + \mu_3 K$ . Для каждого кватерниона  $\hat{U}$  существует сопряженный кватернион  $\hat{U}^* = \bar{\mu}_0 - \bar{\mu}_1 I - \bar{\mu}_2 J - \bar{\mu}_3 K$  (черта означает комплексное сопряжение) и норма  $\hat{U} \hat{U}^* = \hat{U}^* \hat{U} = |\mu_0|^2 + |\mu_1|^2 + |\mu_2|^2 + |\mu_3|^2$ . Унитарным матрицам соответствуют кватернионы с единичной нормой.

Определим кватернион  $\langle \tilde{G}_0 \rangle$ , соответствующий матрице  $\langle \tilde{G}_0 \rangle$ . Факторизованная функция распределения (4) позволяет проводить последовательное усреднение выражения (14):

$$\langle \tilde{G}_0 \rangle = \langle \tilde{Q}_N^* \langle \tilde{Q}_{N-1}^* \{ \dots \langle \tilde{Q}_2^* \langle \tilde{Q}_1^* \tilde{M} \tilde{Q}_1 \rangle \} \tilde{Q}_2 \rangle \dots \rangle \tilde{Q}_N \rangle \rangle_{N-1} \\ \times \tilde{Q}_{N-1} \rangle_{N-1} \tilde{Q}_N \rangle_N,$$

где

$$\tilde{M} = (1 + iI \cos 2\varphi - iK \sin 2\varphi)/2;$$

$$\tilde{Q}_k = \tilde{Q}(\delta_k, \theta_k) = \cos(\delta_k/2) + I \sin(\delta_k/2) \cos 2\theta_k \quad (\text{П6})$$

$$-K \sin(\delta_k/2) \sin 2\theta_k; \quad \tilde{Q}^*(\delta_k, \theta_k) = \tilde{Q}(-\delta_k, \theta_k);$$

$\langle \dots \rangle_k$  означает усреднение по  $k$ -му набору переменных:

$$\langle \dots \rangle_k = \int_0^\infty dI_{gk} \int_{-\pi}^\pi d\alpha_k \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\beta_k$$

$$\times \int_{-\pi}^\pi d\Phi_k \{ \dots \} f(I_{gk}, \alpha_k, \beta_k, \Phi_k) \}. \quad (\text{П7})$$

Для кватерниона  $\tilde{G}_0^{(k)} \equiv \tilde{Q}_0^* \dots \tilde{Q}_N^* \cdot \tilde{Q}_0^* \cdot \tilde{M} \tilde{Q}_0 \tilde{Q}_1 \dots \tilde{Q}_N = x_k + Iy_k + Jz_k + Kw_k$ , (где  $x_k, y_k, z_k$  и  $w_k$  - соответствующие коэффициенты кватерниона  $\tilde{G}_0^{(k)}$ ) умножение справа и слева на  $\tilde{Q}_{k+1}$  и  $\tilde{Q}_{k+1}^*$  соответственно сводится к преобразованию действительной и мнимых частей ( $\tilde{G}_0^{(k+1)} = x_{k+1} + Iy_{k+1} + Jz_{k+1} + Kw_{k+1}$ ), которое может быть записано в виде

$$x_{k+1} = x_k, \quad \begin{pmatrix} y_{k+1} \\ z_{k+1} \\ w_{k+1} \end{pmatrix} = \hat{S}(\delta_{k+1}, \theta_{k+1}) \begin{pmatrix} y_k \\ z_k \\ w_k \end{pmatrix},$$

где

$$\hat{S}(\delta, \theta) = \begin{pmatrix} 1 - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2} \sin^2 2\theta & -\sin \delta \sin 2\theta & -\sin^2 \frac{\delta}{2} \sin 4\theta \\ \sin \delta \sin 2\theta & \cos \delta & \sin \delta \cos 2\theta \\ -\sin^2 \frac{\delta}{2} \sin 4\theta & -\sin \delta \cos 2\theta & 1 - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2} \cos^2 2\theta \end{pmatrix}; \quad (\text{П8})$$

$$x_0 = 1/2; \quad y_0 = i \frac{\cos 2\varphi}{2}; \quad z_0 = 0; \quad w_0 = -i \frac{\sin 2\varphi}{2}. \quad (\text{П9})$$

Заметим, что каждому оптическому элементу, который описывается нормированным кватернионом  $\tilde{U}$ , соответствует унитарная матрица  $S$  размером  $3 \times 3$ , задающая преобразование вида (П8). Если же матрица  $U$  не унитарная, то это преобразование определяется посредством матрицы  $4 \times 4$ .

Для достаточно больших  $N$  (когда  $\varepsilon = p/N \ll 1$ )  $\sin \delta = \delta + O(\varepsilon^3)$  (см. (1)), и матрицу  $\hat{S}$  можно записать в виде  $\hat{S}(\delta, \theta) = 1 + \varepsilon \eta \hat{L}(\delta, \theta) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \eta^2 \hat{L}^2(\delta, \theta) + O(\varepsilon^3)$ , где

$$\eta = \frac{I_g}{\langle I_g \rangle}; \quad \hat{L}(\delta, \theta) = \begin{pmatrix} 0 & \hat{b} & 0 \\ -\hat{b} & 0 & -\hat{a} \\ 0 & \hat{a} & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{П10})$$

Мы ограничимся членами порядка  $\varepsilon^2$ . Переходя от кватерниона  $\langle \tilde{G}_0 \rangle$  к матрице  $\langle \tilde{G}_0 \rangle$  и подставляя ее в (8), получаем

$$\langle \Gamma_0 \rangle = x_0 + iy_N \cos 2\varphi - iw_N \sin 2\varphi, \quad (\text{П11})$$

где

$$\begin{pmatrix} y_N \\ z_N \\ w_N \end{pmatrix} = \hat{S}_1 \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \\ w_0 \end{pmatrix}; \quad (\text{П12})$$

$$\hat{S}_1 = \langle \hat{S} \rangle^N; \quad \langle \hat{S} \rangle = 1 + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$- \frac{1}{2} \varepsilon \begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & A^2 + a^2 + B & 0 \\ 0 & 0 & A + a^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь использованы обозначения, принятые в (21). Возводя  $\langle \hat{S} \rangle$  в  $N$ -ую степень и подставляя в (П12), определяем  $y_N$  и  $w_N$ . Подставляя их в (П11), находим локальную деполаризацию

$$\langle \Gamma_0 \rangle = \sin^2 2\varphi \sin^2 \frac{A}{2} + \frac{p^2}{4N} \left[ B \cos^2 2\varphi + \left( A + \frac{1}{2} B \right) \times \right.$$

$$\times \sin^2 2\varphi \cos \Delta \left] - \frac{p}{8N} \frac{B}{a} \sin^2 2\varphi \sin \Delta. \quad (\text{П13})$$

Расчет ( $\Gamma_{1,3}$ ) для схем с компенсацией (рис.2,б-г) проводится аналогично. Для схемы I, в отличие от предыдущей задачи, матрица  $S$ , преобразуется в матрицу  $S_{,1} = \langle S(\Delta) \rangle \langle S(-\Delta) \rangle$ . В результате расчета получим

$$\langle \Gamma_1 \rangle = \frac{p^2}{2N} \left[ B \cos^2 2\varphi + \left( A + \frac{1}{2} B \right) \sin^2 2\varphi \right] - \frac{p}{8N} \frac{B}{a} \sin^2 2\varphi \sin 2\Delta. \quad (\text{П14})$$

В схеме II одноосному кристаллу соответствует матрица

$$\hat{S}_c = \hat{S}(-\Delta, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Delta & -\sin \Delta \\ 0 & \sin \Delta & \cos \Delta \end{pmatrix},$$

поэтому  $\hat{S}_{12} = \hat{S}_c \langle \hat{S} \rangle^N$ , что дает

$$\langle \Gamma_2 \rangle = \frac{\langle \Gamma_1 \rangle}{2}. \quad (\text{П15})$$

Для схемы III имеем  $\hat{S}_{13} = \langle \hat{S} \rangle^N \hat{S}_{\lambda/2} \langle \hat{S} \rangle^N$ , где

$$\hat{S}_{\lambda/2} = \hat{S}(\pi, -\varphi) = \begin{pmatrix} \cos 4\varphi & 0 & -\sin 4\varphi \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sin 4\varphi & 0 & \cos 4\varphi \end{pmatrix},$$

и получаем

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_3 \rangle &= \sin^2 4\varphi \sin^4(\Delta/2) - \frac{p}{8N} \frac{B}{a} \\ &\times (\sin^2 2\varphi \cos 4\varphi \sin 2\Delta - \sin^2 4\varphi \sin \Delta) \\ &+ \frac{p^2}{2N} \left[ B \cos^2 2\varphi \cos 4\varphi + \left( A + \frac{1}{2} B \right) \sin^2 2\varphi \times \right. \end{aligned}$$

$$\left. \times (1 - 2 \cos^2 2\varphi \cos^2 \Delta) + \left( \frac{1}{2} A + \frac{3}{4} B \right) \sin^2 4\varphi \cos \Delta \right]. \quad (\text{П16})$$

Выражения (18)-(20) для  $u_{0-3}$  получаются интегрированием выражений (П3)-(П16) по  $r$  и  $\varphi$ .

1. Taira T., Ikessue A., Yoshida K. *OSA TOPS on Advanced Solid-State Lasers*, **19**, 430 (1998).
2. Shoji I., Sato Y., Kurimura S., Lupei V., Taira T., Ikessue A., Yoshida K. *Opt. Lett.*, **27**, 234 (2002).
3. Shoji I., Kurimura S., Sato Y., Taira T., Ikessue A., Yoshida K. *AppL Phys. Lett.*, **77**, 939 (2000).
4. Lu J., Murai T., Takaichi K., Uematsu T., Misawa K., Prabhu M., Xu J., Ueda K., Yagi H., Yanagitani T., Kaminskii A.A., Kudryashov A. *AppL Phys. Lett.*, **78**, 3586 (2001).
5. Lu J., Prabhu M., Song J., Li C., Xu J., Ueda K., Kaminskii A.A., Yagi H., Yanagitani T. *AppL Phys. B*, **71**, 469 (2000).
6. Khazanov E.A. *Opt. Lett.*, **27**, 716 (2002).
7. Lu J.R., Lu J.H., Murai T., Takaichi K., Uematsu T., Ueda K., Yagi H., Yanagitani T., Kaminskii A.A. *Jpn. J. AppL Phys. Pt 2*, **40**, L1277 (2001).
8. Ainola L., Aben H. *J. Opt. Soc. Am. A*, **18**, 2164 (2001).
9. Richartz M., Hsu H.-Y. *J. Opt. Soc. Am.*, **39**, 136 (1949).
10. Khazanov E., Andreev N., Palashov O., Poteomkin A., Sergeev A., Mehl O., Reitze D. *AppL Opt.*, **41**, 483 (2002).
- И. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Механика* (М.: Наука, 1973).
12. Мезенов А.В., Сомс Л.Н., Степанов А.И. *Термооптика твердотельных лазеров* (Л.: Машиностроение, 1986).
13. Scott W.C., de Wit M. *AppL Phys. Lett.*, **18**, 3 (1971).
14. Геликонов В.М., Гусовский Д.Д., Леонов В.И., Новиков М.А. *Письма в ЖТФ*, **13**, 775 (1987).
15. Khazanov E., Poteomkin A., Katin E. *J. Opt. Soc. Am. B*, **19**, 667 (2002).
16. Clarkson W.A., Felgate N.S., Hanna D.C. *Opt. Lett.*, **24**, 820 (1999).
17. Малыкин Г.Б., Позднякова В.И., Шерешевский И.А. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **43**, 976 (2000).
18. Рытов СМ., Кравцов Ю.А., Татарский В.И. *Введение в статистическую радиофизику. Ч. II* (М.: Наука, 1978).
19. Takaichi K., Lu J.R., Murai T., Uematsu T., Shirakawa A., Ueda K., Yagi H., Yanagitani T., Kaminskii A.A. *Jpn. J. AppL Phys. Pt 2*, **41**, L96 (2002).
20. Ikessue A. *Private communication* (2002).