

# Нелинейные термонаведенные искажения лазерного пучка в криогенном дисковом усилителе

А.Г.Вяткин, Е.А.Хазанов

*С учетом температурных зависимостей коэффициента теплопроводности, показателя преломления и коэффициента теплового расширения рассчитаны температура, упругие напряжения, термонаведенные линза и деполяризация пучка в криогенном дисковом лазерном усилителе (диск из YAG: Yb, помещенный между медным цилиндром и сапфировым диском, охлаждаемыми жидким азотом). При накачке активного элемента (толщина 0.6 мм, ориентация [001], атомная концентрация иттербия 10 %) излучением полупроводникового лазера (диаметр пучка 6 мм) температура не превышает 140 К при мощности тепловыделения 100 Вт. При этом упругие напряжения в активном элементе в шесть раз меньше предельно допустимых. Фокусное расстояние термонаведенной линзы составляет 5.5 м, а степень деполяризации равна 0.038 % за два прохода через активный элемент. Несмотря на быстро уменьшающийся с ростом температуры коэффициент теплопроводности активного элемента, возможен рост тепловой нагрузки в 1.5–2 раза при неизменных его размерах.*

**Ключевые слова:** криогенный дисковый лазер, нелинейное уравнение теплопроводности, тепловая линза, деполяризация, фотоупругий эффект, метод конечных элементов.

## 1. Введение

В настоящее время во всем мире ведется активная работа по созданию твердотельных лазеров с высокими пиковой и средней мощностями и близким к дифракционному качеством пучка. Быстрый рост мощности твердотельных лазеров стал возможен благодаря широкому распространению диодной накачки, применению активных ионов с малым дефектом кванта и развитию технологий изготовления оптических материалов.

При создании лазеров с высокой средней мощностью одной из основных является проблема паразитных тепловых эффектов в оптических элементах. К ним относятся увеличение средней по объему температуры, термонаведенные упругие напряжения, фазовые и поляризационные искажения пучка [1, 2]. В элементах из оптической керамики к этим эффектам добавляется термонаведенная мелкомасштабная пространственная модуляция поляризации и фазы пучка [3, 4]. Увеличение средней температуры активного элемента приводит, как правило, к нежелательному изменению его физических свойств: уменьшению коэффициента теплопроводности, увеличению коэффициента теплового расширения и производной показателя преломления по температуре, уменьшению сечения вынужденного излучения на рабочем переходе и т. д. Напротив, охлаждение до азотных температур позволяет существенно улучшить свойства среды [5, 6]. Однако при большом тепловыделении температура значительно превышает 77 К и задача теплопроводности становится нелинейной.

Градиент температуры в активном элементе приводит к появлению упругих напряжений. При превышении ими некоторого предельного значения происходит разрушение образца [7]. Уменьшение коэффициента теплового расширения при охлаждении обуславливает уменьшение упругих напряжений и фазовых искажений. Последние возникают из-за изменения длины образца вследствие теплового расширения, температурной зависимости показателя преломления и фотоупругого эффекта [1, 8]. Фотоупругий эффект также вызывает изменение поляризации излучения при прохождении через среду.

Выделение тепла в активном элементе твердотельного лазера связано с дефектом кванта, а также с поглощением лазерного излучения ионами в возбужденном состоянии, ап-конверсией и кросс-релаксацией [9]. Для уменьшения тепловыделения необходимо подбирать активные ионы с небольшим дефектом кванта, в которых отсутствуют указанные паразитные процессы. Один из лучших кандидатов – ион  $\text{Yb}^{3+}$  [10]. В качестве матрицы активного элемента желательно использовать вещество с высокими коэффициентом теплопроводности и прочностью. Для ионов  $\text{Yb}^{3+}$  подходящей матрицей является кристалл YAG.

Для уменьшения температуры и ее градиента применяют активные элементы специальной геометрии с большой площадью поверхности, через которую отводится тепло. Примером является тонкий диск с торцевой накачкой, торцевым вводом-выводом излучения и торцевым охлаждением с помощью хладопроводов из веществ с высоким коэффициентом теплопроводности [11, 12]. В [13] отмечено, что близость атомных радиусов Yb и Y дает возможность получать активные элементы YAG: Yb с высоким допированием (атомная концентрация составляет десятки процентов), что позволяет не использовать многопроходные схемы при проектировании лазеров с активными элементами в виде тонких дисков.

А.Г.Вяткин, Е.А.Хазанов. Институт прикладной физики РАН, Россия, 603950 Н.Новгород, ул. Ульянова, 46;  
e-mail: vyatkin@appl.sci-nnov.ru, khazanov@appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 26 декабря 2008 г.

Настоящая работа посвящена исследованию термонаведенных искажений в дисковом лазерном Yb:YAG-усилителе, охлаждаемом жидким азотом. Решены нелинейная стационарная задача теплопроводности для системы, состоящей из активного диска и хладопроводов, и стационарная задача упругости для активного диска, а также проведен расчет термонаведенных искажений лазерного пучка.

## 2. Решение задачи теплопроводности

Прежде всего необходимо найти распределение температуры в системе из трех соосных цилиндрических тел: активного элемента YAG:Yb, расположенного между двумя хладопроводами (рис.1) – медным цилиндром и диском из оптически прозрачного вещества. Диск может быть выполнен, например, из сапфира, алмаза или недопированного YAG (далее будем называть этот диск сапфировым).

Будем считать, если не указано иное, что координатная ось  $z$  является локальной для каждого из трех тел в системе (оси направлены слева направо, начала координат совпадают с левыми торцами этих тел), а ось  $Z$  – глобальной и совпадает с осью  $z$  активного элемента.

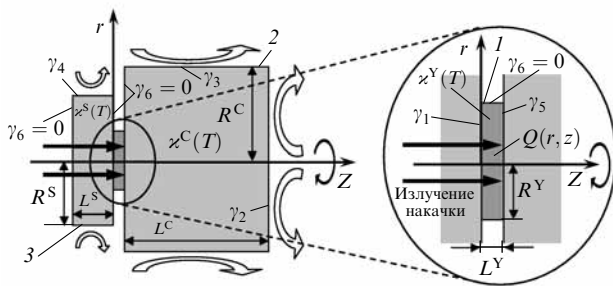


Рис.1. Схема охлаждения активного элемента (1) при помощи медного (2) и сапфирового (3) хладопроводов. Белые стрелки обозначают охлаждение жидким азотом;  $\kappa^Y$ ,  $\kappa^C$  и  $\kappa^S$  – коэффициенты теплопроводности YAG:Yb, меди и сапфира соответственно;  $\gamma_1 - \gamma_6$  – коэффициенты теплопереноса через соответствующие поверхности.

### 2.1. Общая постановка задачи теплопроводности

Пусть на систему со стороны сапфирового диска падает аксиально-симметричный пучок накачки с пространственным профилем  $f(r)$ . Излучение поглощается в активном элементе по мере распространения, отражается от напыленного на кристалл зеркала и проходит через диск в обратном направлении, испытывая дальнейшее поглощение, после чего выходит из системы. Считая поглощение в среде не зависящим от температуры и интенсивности излучения, а мощность тепловыделения пропорциональной поглощенной мощности, получаем плотность мощности тепловыделения в активном элементе

$$Q(r, z) = Q_0 f(r) g(z), \quad (1)$$

$$g(z) = \exp(-\alpha_{\text{abs}} z) + \exp[\alpha_{\text{abs}}(z - 2L^Y)],$$

где  $\alpha_{\text{abs}}$  – коэффициент линейного поглощения излучения средой;  $L^Y$  – толщина активного элемента;  $Q_0$  – коэффициент пропорциональности.

Для простоты будем считать, что оба хладопровода охлаждаются жидким азотом непосредственно и аксиально-симметрично, анизотропией тензора теплопровод-

ности сапфира пренебрежем. В рамках данных упрощающих предположений задача теплопроводности становится аксиально-симметричной.

Аналитическая аппроксимация зависимости коэффициента теплопроводности YAG от температуры взята из работы [6]. Однако коэффициент теплопроводности зависит от концентрации примеси, что существенно для активных элементов с высоким допированием (десятки процентов). Зависимость коэффициента теплопроводности YAG:Yb от атомной концентрации активных ионов при комнатной температуре приведена в [13]. В условиях недостатка данных о температурной зависимости коэффициента теплопроводности допированных кристаллов YAG:Yb было сделано предположение о том, что допирование уменьшает теплопроводность в одинаковой степени во всем интересующем нас диапазоне температур (77 К – 350 К).

Стационарное уравнение теплопроводности имеет вид

$$\text{div}[\kappa(T)\nabla T] + Q(r) = 0, \quad (2)$$

где  $T$  – температура;  $\kappa(T)$  – коэффициент теплопроводности. Граничные условия запишем в виде

$$\kappa(T) \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \gamma(T_{\text{ext}} - T)|_{\Gamma}, \quad (3)$$

где  $\Gamma$  – граничная поверхность (производная от температуры берется по направлению внешней нормали  $\mathbf{n}$  к ней);  $\gamma$  – коэффициент теплопереноса через поверхность теплового контакта;  $T_{\text{ext}}$  – температура тела, контактирующего с данным вдоль поверхности  $\Gamma$ .

На поверхностях теплового контакта активного диска с хладопроводами, как правило, присутствует пластичный термоинтерфейс. Заполняя пустоты между телами, он улучшает теплопередачу через контакт, т. е. увеличивает  $\gamma$ . Так, на границу с медью обычно наносится индиевая пленка или термопаста. Сравнение эффективности различных термоинтерфейсов приведено в [14].

В линейном приближении система (2), (3) допускает аналитическое решение, которое будет рассмотрено в п.2.2. В нелинейном случае возможно лишь численное решение, которому посвящен п.2.3.

### 2.2. Аналитическое решение задачи теплопроводности

Для аналитического решения задачи теплопроводности воспользуемся методом функций Грина. Для цилиндрического тела ( $0 \leq r \leq R$ ,  $0 \leq z \leq L$ ) решение уравнения Пуассона (уравнение (2) при  $\kappa = \text{const}$ ) с неоднородными граничными условиями третьего рода (3) в любой точке может быть представлено в виде суммы интегралов от объемных и поверхностных источников. Температуру хладагента будем считать одинаковой для обоих хладопроводов и не зависящей от координат. В этом случае в силу линейности задачи температуру можно отсчитывать от температуры хладагента и прибавлять последнюю к решению на конечном этапе. Тогда выражения для температур тел в системе могут быть записаны в виде [15]

$$T^Y(r, z) = \sum_{m,s} \frac{J_0(\tilde{\mu}_m^Y r) h_s^Y(z)}{N_{ms}^Y} \left[ f_{11} F_m G_s + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{\lambda}_1^C h_s^Y(L^Y) \int_0^{R^Y} J_0(\tilde{\mu}_m^Y \xi) T^C(\xi, 0) \xi d\xi \\
& + \bar{\lambda}_1^S h_s^Y(0) \int_0^{R^Y} J_0(\tilde{\mu}_m^Y \xi) T^S(\xi, L^S) \xi d\xi \Big], \\
T^C(r, z) &= \sum_{m,s} \frac{J_0(\tilde{\mu}_m^C r) h_s^C(z)}{N_{ms}^C} \bar{\lambda}_2^C h_s^C(0) \\
& \times \left[ \int_0^{R^Y} J_0(\tilde{\mu}_m^C \xi) T^Y(\xi, L^Y) \xi d\xi + \int_{R^Y}^{R^C} J_0(\tilde{\mu}_m^C \xi) T^C(\xi, 0) \xi d\xi \right], \\
T^S(r, z) &= \sum_{m,s} \frac{J_0(\tilde{\mu}_m^S r) h_s^S(z)}{N_{ms}^S} \bar{\lambda}_2^S h_s^S(L^S) \\
& \times \left[ \int_0^{R^Y} J_0(\tilde{\mu}_m^S \xi) T^Y(\xi, 0) \xi d\xi + \int_{R^Y}^{R^S} J_0(\tilde{\mu}_m^S \xi) T^S(\xi, L^S) \xi d\xi \right],
\end{aligned} \quad (4)$$

где  $J_0$  и  $J_1$  – функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядков; индексы Y, C и S означают принадлежность величины к активному элементу, меди и сапфиру соответственно;

$$\bar{\lambda}_1^C = \frac{2\pi\gamma_5}{\kappa^Y}; \bar{\lambda}_1^S = \frac{2\pi\gamma_1}{\kappa^Y}; \bar{\lambda}_2^C = \frac{2\pi\gamma_5}{\kappa^C}; \bar{\lambda}_2^S = \frac{2\pi\gamma_1}{\kappa^S}; f_{11} = \frac{2\pi Q_0}{\kappa^Y};$$

$$F_m = \int_0^{R^Y} J_0(\tilde{\mu}_m^Y \xi) f(\xi) \xi d\xi; \quad G_s = \int_0^{L^Y} h_s^Y(\xi) g(\xi) d\xi; \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
N_{ms} &= \frac{\pi R^2}{2} [J_0^2(\tilde{\mu}_m R) + J_1^2(\tilde{\mu}_m R)] \left( 1 + \frac{\tilde{\mu}_m^2}{\lambda_s^2} \right) \\
& \times \left[ (\lambda_s^2 + k_2^2) \left( \frac{k_3}{\lambda_s^2 + k_3^2} + L \right) + k_2 \right];
\end{aligned} \quad (6)$$

$$h_s(z) = \cos(\lambda_s z) + \frac{k_2}{\lambda_s} \sin(\lambda_s z); \quad (7)$$

$\tilde{\mu}_m$  и  $\lambda_s$  – неотрицательные корни трансцендентных уравнений

$$\tilde{\mu}_m J_1(\tilde{\mu}_m R) = k_1 J_0(\tilde{\mu}_m R), \quad \frac{\tan(\lambda_s L)}{\lambda_s} = \frac{k_2 + k_3}{\lambda_s^2 - k_2 k_3}; \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
& \{k_1, k_2, k_3, L, R\} \\
& = \begin{cases} \{0, \gamma_1/\kappa^Y, \gamma_5/\kappa^Y, L^Y, R^Y\} & \text{для YAG : Yb,} \\ \{\gamma_3/\kappa^C, \gamma_5/\kappa^C, \gamma_2/\kappa^C, L^C, R^C\} & \text{для меди,} \\ \{\gamma_4/\kappa^S, 0, \gamma_1/\kappa^S, L^S, R^S\} & \text{для сапфира.} \end{cases} \quad (9)
\end{aligned}$$

Индексы суммирования  $m$  и  $s$  в (4) изменяются, строго говоря, от 1 до  $\infty$ , но для практических расчетов необходимо оставлять во всех рядах конечное число членов. Поясним смысл подчеркивания ряда множителей в (4). Метод функций Грина не позволяет найти достоверное решение на границах тел с неоднородным граничным условием, т.е. на тех границах, на которых имеет место тепловой контакт тел. Поведение решения во многом напоминает поведение ряда Фурье вблизи точки разрыва первого рода. Из-за усечения рядов в (4) решение некорректно в области размером порядка периода осцилляций первого отброшенного слагаемого, а в остальной обла-

сти приобретает нежелательную модуляцию. В теории рядов Фурье этот эффект называется явлением Гиббса. Поскольку знание достоверного решения имеет принципиальное значение для решения задачи о тепловом контакте тел, эти артефакты необходимо устранить.

Решение (4) было скорректировано по следующему алгоритму. Во-первых, для борьбы с явлением Гиббса используется  $N_L$ -кратное ( $N_L \simeq 2 - 3$ ) сглаживание Ланцоша [16] вдоль координатных осей  $r$  и  $z$ . Во-вторых, решение в приграничной области получено путем полиномиальной экстраполяции по методу наименьших квадратов решения в более удаленной от границы области, которое после сглаживания можно считать достоверным. Можно показать, что данные процедуры принципиально не изменяют схемы решения и приводят лишь к преобразованию подчеркнутых в формулах (4) функций:

$$\begin{aligned}
J_0(\tilde{\mu}_m r) &= \tilde{l}_m^{N_L} J_0(\tilde{\mu}_m r), \\
h_s(z) &= l_s^{N_L} \left[ K_s^{(0N)} h_s(\Delta) + \sum_{j=1}^N K_s^{(jN)} \frac{1}{j!} \left( \frac{z - \Delta}{\delta} \right)^j \right. \\
& \times \left. \frac{1}{\lambda_s^j} \frac{d^j h_s(\xi)}{d\xi^j} \Big|_{\xi=\Delta} \right] \text{ при } 0 \leq z < \Delta, \\
h_s(z) &= l_s^{N_L} h_s(z) \text{ при } \Delta \leq z \leq L - \Delta,
\end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
h_s(z) &= l_s^{N_L} \left[ K_s^{(0N)} h_s(L - \Delta) + \sum_{j=1}^N K_s^{(jN)} \frac{1}{j!} \left( \frac{\Delta + z - L}{\delta} \right)^j \right. \\
& \times \left. \frac{1}{\lambda_s^j} \frac{d^j h_s(\xi)}{d\xi^j} \Big|_{\xi=L-\Delta} \right] \text{ при } L - \Delta < z \leq L.
\end{aligned}$$

Здесь  $\delta$  – полупериод первой отброшенной гармоники в ряду по  $s$  в (4);  $\Delta$  – расстояние, равное двум-трем периодам той же гармоники;  $N \simeq 1 - 3$  – старшая степень экстраполирующего полинома, подбиравшаяся экспериментально; в случае экстраполяции линейной функцией, оказавшемся наиболее эффективным, коэффициенты

$$K_s^{(01)} = l_s, \quad K_s^{(11)} = 3 \frac{l_s - \cos(\lambda_s \delta)}{\lambda_s \delta}; \quad (11)$$

$$\tilde{l}_m = \frac{\sin(\tilde{\mu}_m \delta)}{\tilde{\mu}_m \delta}, \quad l_s = \frac{\sin(\lambda_s \delta)}{\lambda_s \delta} \quad (12)$$

– сглаживающие факторы Ланцоша вдоль осей  $r$  и  $z$  соответственно;  $\tilde{\delta}$  – половина квазипериода первого отброшенного слагаемого в ряду по  $m$  в (4).

Используя выражение (4), для температур при  $Z = 0$  и  $Z = L^Y$  можно записать замкнутую систему уравнений:

$$\hat{\Theta}(r) = \int_0^{R_{\max}} \sum_m \hat{\Phi}_m(r) \hat{\Psi}_m(\xi) \hat{\Theta}(\xi) \xi d\xi + \hat{f}(r), \quad (13)$$

где

$$\hat{\Theta}(r) = \begin{pmatrix} T^S(r, L^S) \\ T^Y(r, 0) \\ T^Y(r, L^Y) \\ T^C(r, 0) \end{pmatrix}; \quad \hat{f}(r) = f_{11} \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_m \frac{J_0(\tilde{\mu}_m^Y r) \tilde{Q}_m^{(0)}}{\tilde{\mu}_m^Y} \\ \sum_m \frac{J_0(\tilde{\mu}_m^Y r) \tilde{Q}_m^{(1)}}{\tilde{\mu}_m^Y} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\hat{\Phi}_m(r) = \begin{pmatrix} \frac{J_0(\tilde{\mu}_m^S r)}{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{J_0(\tilde{\mu}_m^Y r)}{0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{J_0(\tilde{\mu}_m^Y r)}{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{J_0(\tilde{\mu}_m^C r)}{0} \end{pmatrix}; \quad (14)$$

$$\hat{\Psi}_m(r) = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_2^S \tilde{R}_m^S \hat{1}_{[R^Y, R^S]}(r) J_0(\tilde{\mu}_m^S r) & \bar{\lambda}_2^S \tilde{R}_m^S \hat{1}_{[0, R^Y]}(r) J_0(\tilde{\mu}_m^S r) & 0 & 0 \\ \bar{\lambda}_1^S \tilde{R}_m^{(00)} \hat{1}_{[0, R^Y]}(r) J_0(\tilde{\mu}_m^Y r) & 0 & \bar{\lambda}_1^C \tilde{R}_m^{(10)} \hat{1}_{[0, R^Y]}(r) J_0(\tilde{\mu}_m^Y r) & 0 \\ \bar{\lambda}_1^S \tilde{R}_m^{(10)} \hat{1}_{[0, R^Y]}(r) J_0(\tilde{\mu}_m^Y r) & 0 & \bar{\lambda}_1^C \tilde{R}_m^{(11)} \hat{1}_{[0, R^Y]}(r) J_0(\tilde{\mu}_m^Y r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda}_2^C \tilde{R}_m^C \hat{1}_{[R^Y, R^C]}(r) J_0(\tilde{\mu}_m^C r) \end{pmatrix};$$

$$\hat{1}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]; \end{cases} \quad R_{\max} = \max(R^C, R^S);$$

$$\tilde{R}_m^{(00)} = \sum_s \frac{h_s^Y(0) h_s^Y(0)}{N_{ms}^Y}; \quad \tilde{R}_m^{(01)} = \sum_s \frac{h_s^Y(0) h_s^Y(L^Y)}{N_{ms}^Y};$$

$$\tilde{R}_m^{(10)} = \sum_s \frac{h_s^Y(L^Y) h_s^Y(0)}{N_{ms}^Y}; \quad \tilde{R}_m^{(11)} = \sum_s \frac{h_s^Y(L^Y) h_s^Y(L^Y)}{N_{ms}^Y};$$

$$\tilde{R}_m^S = \sum_s \frac{h_s^S(L^S) h_s^S(L^S)}{N_{ms}^S}; \quad \tilde{R}_m^C = \sum_s \frac{h_s^C(0) h_s^C(0)}{N_{ms}^C}; \quad (15)$$

$$\tilde{Q}_m^{(0)} = F_m \sum_s \frac{h_s^Y(0) G_s}{N_{ms}^Y}; \quad \tilde{Q}_m^{(1)} = F_m \sum_s \frac{h_s^Y(L^Y) G_s}{N_{ms}^Y}.$$

Уравнение (13) представляет собой матричное обобщение интегрального уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром, которое с помощью стандартной замены сводится к линейной алгебраической системе уравнений [17], разрешимой стандартными методами [18]. Таким образом, распределение температуры в активном элементе и хладопроводах может быть найдено.

### 2.3. Численное решение задачи теплопроводности

Если коэффициент теплопроводности зависит от температуры, то уравнение (2) принимает вид

$$\kappa(T) \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial \kappa}{\partial T} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] + Q(r, z) = 0. \quad (16)$$

В этом случае задача решалась численно. Для получения разностных схем применялся метод конечных разностей (более простой математически, но приводящий к менее обусловленным схемам по сравнению с вариационно-разностными методами). Поскольку размеры хладопроводов существенно (по толщине в 5–100 раз) превышают размеры активного элемента, в хладопроводах необходимо задавать неравномерную сетку, которая имеет малый шаг вблизи YAG:Yb-диска и разрежается по мере удаления от него.

Для решения полученной алгебраической системы использовались эффективные итерационные схемы, осно-

ванные на сведения исходной  $N$ -мерной задачи (в данном случае двумерной) к последовательности одномерных подзадач, требующих решения линейризованных алгебраических систем с трехдиагональными матрицами, которые, в свою очередь, могут быть решены методом прогонки. Эта схема, называемая методом переменных на-

правлений, описана, например, в [19]. Для решения поставленной задачи потребовалась небольшая модификация схемы, позволяющая получать для одномерных подзадач сходящиеся системы уравнений при задании на обоих концах отрезка однородных граничных условий второго рода (выражение (3) при  $\gamma = 0$ ).

По сравнению с наиболее простыми для программирования методом простой итерации и методом Зейделя данная методика позволяет существенно повысить скорость расчета. В случае модельной задачи контакта хладагента непосредственно с активным диском скорость счета увеличивается в 20 раз; для исходной задачи это увеличено меньше (2–3 раза), но по-прежнему существенно. От других эффективных схем данная схема выгодно отличается относительной простотой программирования и эффективным использованием особенностей матрицы линейризованной системы  $N$ -мерной задачи.

Сравнение численного решения и решения, полученного методом функций Грина, показало, что для линейной задачи имеет место хорошее их совпадение (различие составляет не более 1 %). Численное решение требует большего машинного времени, но его алгоритм значительно проще модифицируется. Метод функций Грина не позволяет учесть зависимость коэффициента теплопроводности от температуры, но полученное этим методом решение в линейном приближении может быть использовано как начальное приближение для конечно-разностной численной схемы, что еще больше ускоряет процесс расчета.

### 2.4. Анализ решения задачи теплопроводности

Для расчетов мы использовали следующие параметры: толщина YAG:Yb-диска 0.6 мм, диаметр 10 мм, атомная концентрация 10 %, ориентация [001]; диаметр медного хладопровода 70 мм, толщина 60 мм; диаметр сапфирового диска 30 мм, толщина 3 мм. Диаметр пучка накачки был равен 6 мм. Мощность тепловыделения

$$P_{\text{heat}} = Q_0 \int_0^{R^Y} f(r) r dr \int_0^{L^Y} g(z) dz \quad (17)$$

составляла  $\sim 100$  Вт ( $\sim 350$  Вт/см<sup>2</sup> в пересчете на единицу площади сечения пучка).

На рис.2 представлены зависимости максимальной и средней по области пучка температур от  $P_{\text{heat}}$  при охлаждении одним (медным) и двумя (медным и сапфировым) хладопроводами. Приведены также зависимости, соответствующие промежуточному режиму, при котором

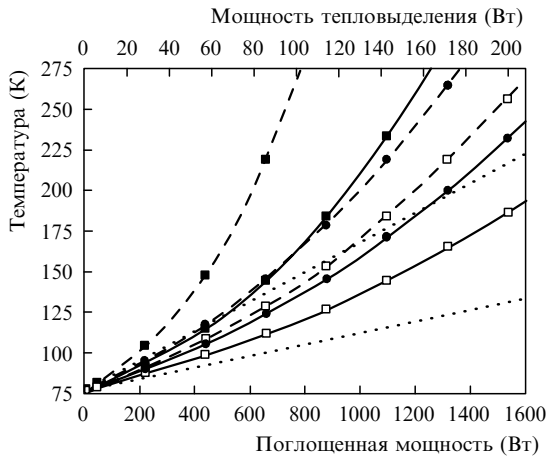


Рис.2. Зависимости средней по области пучка (сплошные кривые) и максимальной (штриховые кривые) температуры YAG:Yb от мощности тепловыделения и мощности поглощенного излучения накачки при охлаждении одним медным хладопроводом (■), медным хладопроводом и сапфировым диском (●) и двумя хладопроводами (□). Пунктирные прямые — линейная аппроксимация самой верхней и самой нижней кривых. Температура хладагента 77 К.

сапфировый диск не контактирует с хладагентом. В этом случае выигрыш в температуре по отношению к схеме с одним хладопроводом получается из-за того, что часть тепла, уходящая из активного элемента в сапфир, распространяется в нем по радиусу и переходит через активный элемент в медный хладопровод вне области пучка. Этот режим несколько менее эффективен, чем режим с двумя хладопроводами, но не требует дополнительных усилий по организации теплоотвода от сапфира.

При тепловой мощности  $P_{\text{heat}} = 100$  Вт нелинейные эффекты существенно влияют на решение, поскольку теплопроводность YAG уменьшается в два раза при изменении температуры от 77 К до 107 К [6]. Так, при охлаждении активного элемента только с одного торца максимальная температура в кристалле превышает 150 К уже при  $P_{\text{heat}} = 60$  Вт. Применение второго хладопровода позволяет при той же максимальной температуре повысить мощность до 110 Вт, а при  $P_{\text{heat}} = 100$  Вт температура не превышает 140 К.

Таким образом, при рассмотренных параметрах усилителя температуру активного элемента можно удерживать в пределах 150 К при  $P_{\text{heat}} \sim 100$  Вт.

### 3. Решение задачи упругости

В линейном приближении (закон Гука) тензор упругих напряжений  $\hat{\sigma}$  связан с тензором деформаций  $\hat{u}$  и температурой  $T$  соотношением

$$\sigma_{ij} = \lambda_{ijkl} \left[ u_{kl} - \int_{T_0}^T \alpha_{kl}(T') dT' \right], \quad (18)$$

где  $\hat{\lambda}$  — тензор упругой жесткости;  $\hat{\alpha}$  — тензор теплового расширения;  $T_0$  — начальная температура, при которой тело в отсутствие напряжений считается недеформированным. Здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам от 1 до 3, индексы  $i, j$  также принимают значения от 1 до 3 [8].

В пренебрежении внешними объемными силами условия равновесия деформированного тела во внутренней области имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad (19)$$

условия на свободной границе суть равенство нулю нормальных и скалывающих напряжений на поверхности образца [20]:

$$\sigma_{ij} n_j|_{\Gamma} = 0, \quad (20)$$

где  $\Gamma$  — поверхность тела;  $n_j$  — компоненты вектора внешней нормали к ней.

Кристал YAG является кубическим, но мы будем считать его изотропным. Это упрощающее предположение позволяет нам свести задачу к двухкоординатной в системе координат  $r, z$ . В этом случае при малых деформациях тензор  $\hat{u}$  имеет следующие ненулевые компоненты [20]:

$$u_{rr} = \frac{\partial U_r}{\partial r}, \quad u_{\phi\phi} = \frac{U_r}{r}, \quad u_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z}, \quad u_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_r}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial r} \right), \quad (21)$$

где  $U_r$  и  $U_z$  — компоненты вектора смещений;  $\phi$  — полярный угол. Система уравнений (18)–(21) представляет собой замкнутую граничную задачу для этих компонент.

Зависимость коэффициента теплового расширения от температуры приведена в [6]. Там же говорится о слабой зависимости компонент тензора упругой жесткости от температуры (различие компонент при  $T = 100$  К и 300 К составляет не более 10 %), которой будем пренебрегать.

Для решения задачи упругости был написан конечно-элементный численный код. Решение находится методом переменных направлений, обсуждавшимся выше. Порядок аппроксимации дифференциальных операторов разностными равен 2 на всей сетке.

При  $P_{\text{heat}} = 100$  Вт и охлаждении двумя хладопроводами компоненты тензора деформаций не превышают по абсолютному значению  $3.2 \times 10^{-4}$ , что подтверждает применимость закона Гука и формул (21), а упругие напряжения в кристалле не превышают  $3.4 \times 10^7$  Па, что в шесть раз меньше предельно допустимых для недопированного YAG [2].

### 4. Расчет термонаведенных искажений пучка

При расчете термонаведенных искажений пучка мы учитывали изменение формы активного элемента (вместе с напыленным на него диэлектрическим зеркалом), зависимость показателя преломления от температуры, электронное изменение показателя преломления (изменение показателя преломления в зависимости от населенности уровней активных ионов) [21] и фотоупругий эффект. Для изменения оптической длины пути при прохождении пучка через элемент  $dz$  можно записать выражение

$$\delta L_m = \left\{ (n_0 - 1) u_{zz} + [n(T) - n_0] + \frac{2\pi}{9n_0} (n_0^2 + 2)^2 \Delta p \Delta N - \frac{n_0^3}{2} \Delta B_{mm} \right\} dz, \quad (22)$$

где  $n_0 = n(T_0)$  — невозмущенный показатель преломления;  $\Delta p$  — разность поляризуемостей иона  $\text{Yb}^{3+}$  в основном состоянии и на верхнем рабочем уровне;  $\Delta N$  при работе по четырехуровневой схеме равно разности насе-

ленностей рабочих лазерных уровней;  $\Delta\hat{B}$  – изменение тензора диэлектрической непроницаемости\*, вызванное фотоупругим эффектом:

$$\Delta B_{ij} = \pi_{ijkl}\sigma_{kl}; \quad (23)$$

$\hat{\pi}$  – тензор пьезооптических коэффициентов. Выражение (22) справедливо для излучения, поляризованного вдоль двух взаимно перпендикулярных осей  $m = \mu$  и  $\nu$ , для которых  $\Delta B_{\mu\nu} = 0$ . Эти направления в каждой точке кристалла в общем случае различны. Отклонением лучей пучка от прямых, параллельных оси  $z$ , мы пренебрегли. Четыре слагаемых в фигурных скобках описывают соответственно изменение длины элемента, температурное и электронное изменения показателя преломления и фотоупругий эффект.

Если собственные поляризации (вдоль осей  $\mu$  и  $\nu$ ) не зависят от  $z$ , то, интегрируя (22) по  $z$ , получаем изменение оптической длины пути за два прохода излучения (с отражением от зеркала). В общем случае для учета анизотропии, вызванной фотоупругим эффектом, используем формализм матриц Джонса [22].

Введем декартовы координаты  $x, y$  в плоскости поперечного сечения пучка. Пусть на активный диск падает излучение, линейно поляризованное вдоль оси  $x$  ( $x_0$  и  $y_0$  – орты осей  $x$  и  $y$  соответственно). Вектор поляризации поля на выходе из кристалла (после двух проходов)  $\xi$  может быть найден путем перемножения матриц Джонса для элементов среды с центрами в узлах сетки, использованной для конечно-элементной аппроксимации задачи упругости. В матрицах Джонса мы учитывали только разностную фазу собственных поляризаций, средняя фаза вычислялась отдельно. В этом случае выражение для  $\xi$  кроме информации о поляризации содержит также астигматическую составляющую фазы. Тогда выражение для набега фазы поляризованной вдоль оси  $x$  компоненты прошедшей волны имеет вид

$$\Delta\varphi(x, y) = 2k_0 \left\{ [-(n_0 - 1)U_z|_{z=0} + n_0 U_z|_{z=L^y}] + \int_0^{L^y} [n(T) - n_0]dz + \frac{2\pi}{9n_0} (n_0^2 + 2)^2 \Delta p \int_0^{L^y} \Delta N dz - \frac{n_0^3}{2} \int_0^{L^y} \frac{\Delta B_{xx} + \Delta B_{yy}}{2} dz \right\} + \arctan \frac{\text{Im}(\xi x_0)}{\text{Re}(\xi x_0)}, \quad (24)$$

где  $k_0$  – волновое число в свободном пространстве. Выражение (24) позволяет вычислить фокусное расстояние термонаведенной линзы и ее аберрации. Локальная ( $\Gamma_d$ ) и интегральная ( $\gamma_d$ ) степени деполяризации для негиротропной среды определяются как

$$\Gamma_d(x, y) = |\xi y_0|^2, \quad \gamma_d = \frac{\iint \Gamma_d |E_{in}|^2 dx dy}{\iint |E_{in}|^2 dx dy}, \quad (25)$$

где  $E_{in}$  – напряженность поля падающего излучения; интегрирование выполняется по поперечному сечению пучка.

Несложно показать, что для излучения, поляризованного вдоль оси  $y$ , степень деполяризации будет такой же,

а выражение для набега фазы будет отличаться от (24) знаком перед последним слагаемым. С помощью созданного численного кода расчет степени деполяризации и набега фазы был выполнен для кристалла с произвольной ориентацией кристаллофизических осей. Использовалась методика, описанная в [3, 23].

На рис.3 приведены стигматичная и астигматичная составляющие набега фазы и профиль степени деполяризации пучка, вычисленные для кристалла с ориентацией [001] в минимуме интегральной степени деполяризации (входное излучение линейно поляризовано под углом  $45^\circ$  к кристаллофизической оси) при  $P_{\text{heat}} = 100$  Вт и охлаждении активного элемента двумя хладопроводами. Температурная зависимость  $n(T)$  для YAG взята из [6], значение  $\Delta p$  – из [21]. Учтен также вклад в формирование тепловой линзы, обусловленный зависимостью  $n(T)$  для сапфира. На рис.3 отрицательная фаза соответствует положительной линзе и наоборот. Основной вклад в формирование термонаведенной линзы вносит искривление зеркала, напыленного на поверхность кристалла. Это выпуклое зеркало создает результирующую отрицательную линзу, хотя слагаемое в (22), отвечающее за температурное изменение показателя преломления, дает положительный вклад. Вклад фотоупругого эффекта положителен в плоскости поляризации и отрицателен в перпендикулярной ей плоскости.

Искажения пучка при  $P_{\text{heat}} = 100$  Вт небольшие: фокусное расстояние термонаведенной линзы по абсолютному значению составляет не менее 5.5 м в области пучка; максимальные значения  $\Gamma_d$  лежат вне области пучка, а интегральная степень деполяризации  $\gamma_d = 3.8 \times 10^{-4}$ .

Зеркало становится существенно выпуклым (смещение его поверхности вдоль оси  $z$  может составлять до 1 мкм), поэтому возможна потеря теплового контакта с медным хладопроводом в области пучка, что вызовет дополнительный рост температуры. Это обстоятельство необходимо учитывать при проведении экспериментов.

## 5. Заключение

В настоящей работе проведен расчет термонаведенных искажений пучка в дисковом лазерном Yb:YAG-усилителе с высокой средней мощностью в стационарном режиме при учете температурных зависимостей параметров среды. Показано, что применение криогенного охлаждения позволяет получать излучение высокого качества при тепловых нагрузках  $\sim 350$  Вт/см<sup>2</sup>. Если мощность тепловыделения составляет 13 % от мощности поглощенного излучения, а эффективность преобразования запасенной энергии в энергию выходного излучения – примерно 70 %, то приращение интенсивности лазерного излучения на выходе одного усилителя будет равно  $\sim 1750$  Вт/см<sup>2</sup>.

Увеличение мощности ограничивается быстро уменьшающимся с ростом температуры коэффициентом теплопроводности активного элемента, но увеличение тепловой нагрузки в 1.5–2 раза при неизменных его размерах допустимо. Исходя из этого применение активных сред с малыми тепловыми потерями делает возможным создание компактных лазеров со средней мощностью  $\sim 1$  кВт.

В настоящее время в ИПФ РАН проводятся эксперименты по исследованию усиления в криогенных YAG:Yb-дисках при мощности накачки до 600 Вт (пучок ди-

\* Тензор диэлектрической непроницаемости – это тензор, обратный тензору диэлектрической проницаемости.

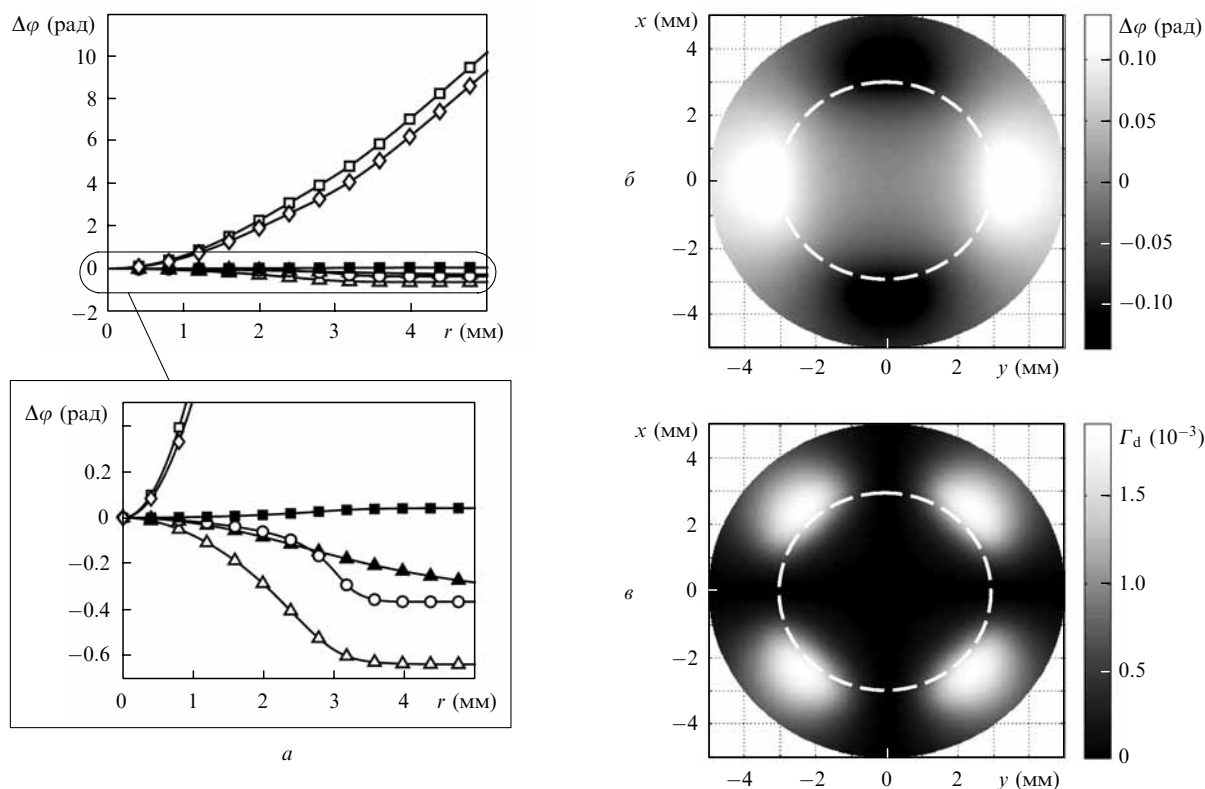


Рис.3. Термонаведенные искажения пучка излучения за два прохода через усилитель: стигматическая составляющая набега фазы (◇), включающая в себя геометрические искажения (□), температурные изменения показателя преломления в YAG:Yb (△) и в сапфире (▲), электронное изменение показателя преломления в YAG:Yb (○) и фотоупругие искажения (■) (a), а также астигматическая составляющая набега фазы (б) и локальная степень деполяризации (в). На рис.3,б и в излучение поляризовано вдоль оси  $x$ , а белые штриховые окружности показывают области пучка накачки.

аметром 3 мм, плотность мощности 6.1 кВт/см<sup>2</sup>). Достигнутые экспериментальные результаты [24] хорошо согласуются с приведенными расчетами.

Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН «Фемтосекундная оптика и новые оптические материалы» и гранта РФФИ № 08-02-99044-р\_офи.

1. Мезенов А.В., Сомс Л.Н., Степанов А.И. *Термооптика твердотельных лазеров* (Л.: Машиностроение, 1986).
2. Koechner W. *Solid-state Laser Engineering* (Berlin: Springer-Verlag, 1999).
3. Khazanov E.A. *Opt. Lett.*, **27**, 716 (2002).
4. Soloviev A.A., Snetkov I.L., Zelenogorsky V.V., Kozhevnikov I.E., Palashov O.V., Khazanov E.A. *Opt. Express*, **16**, 21012 (2008).
5. Brown D.C. *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.*, **11**, 587 (2005).
6. Brown D.C. *IEEE J. Quantum Electron.*, **33**, 861 (1997).
7. Tidwell S.C., Seamans J.F., Bowers M.S., Cousins A.K. *IEEE J. Quantum Electron.*, **28**, 997 (1992).
8. Най Дж. *Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц* (М.: Мир, 1967).
9. Brown D.C. *IEEE J. Quantum Electron.*, **34**, 560 (1998).
10. Fan T.Y. *IEEE J. Quantum Electron.*, **29**, 1457 (1993).
11. Контаг К., Каршевский М., Стивен К., Гисен А., Хюгель Г.

*Квантовая электроника*, **28**, 139 (1999).

12. Tokita S., Kawanaka J., Fujita M., Kawashima T., Isawa Y. *Appl. Phys. B*, **80**, 635 (2005).
13. Patel F.D., Honea E.C., Speth J., Payne S.A., Hutcheson R., Equall R. *IEEE J. Quantum Electron.*, **37**, 135 (2001).
14. Chénais S., Forget S., Druon F., Balembois F., Georges P. *Appl. Phys. B*, **79**, 221 (2004).
15. Полянин А.Д. *Справочник по линейным уравнениям математической физики* (М.: Физматлит, 2001).
16. Хемминг Р.В. *Теория цифровых фильтров* (М.: Сов. радио, 1980).
17. Соболев С.Л. *Уравнения математической физики* (М.: Наука, 1966).
18. Березин И.С., Жидков Н.П. *Методы вычислений. Т. II* (М.: Физматлит, 1959).
19. Самарский А.А. *Теория разностных схем* (М.: Наука, 1977).
20. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория упругости* (М.: Наука, 1987).
21. Антипов О.Л., Бредихин Д.В., Еремейкин О.Н., Ивакин Е.В., Савикин А.П., Суходолов А.В., Фёдорова К.А. *Квантовая электроника*, **36**, 418 (2006).
22. Jones R.C. *J. Opt. Soc. Am.*, **31**, 488 (1941).
23. Koechner W., Rice D.K. *J. Opt. Soc. Am.*, **61**, 758 (1971).
24. Перевезенцев Е.А., Мухин И.Б., Палашов О.В., Хазанов Е.А. *Квантовая электроника*, **39**, 807 (2009).